과제 제안서 샘플

랜덤 슈뢰딩거 연산자의 고유치 분포에 대한 연구

(Research on the eigenvalue distributions of random Schrödinger operators)

연구의 필요성

- 고체물질에 약간의 불순물이 포함되어 있는 경우, 그 정도나 종류가 물질의 전기 전도성에 커다란 영향을 미치게 된다. 불순물의 위치를 정확하게 알지 못하더라도, 확률적인 분석을 통해 물질의 성질을 예측하는 것이 가능하고, 이에 대한 수학적 모형이 랜덤 슈뢰딩거 연산자이다.

- 랜덤 슈뢰딩거 연산자란 '확률적 개념을 포함하는 슈뢰딩거 연산자'로 랜덤 슈뢰딩거 연산자의 고유치 분포에 대한 연구는 앤더슨에 의해 처음으로 이루어졌는데 2 차원 이하의 경우, 또는 스펙트럼의 끝부분에서는 고유치의 분포가 포와송 프로세스(Poisson process)로 나타나며, 이에 대응되는 고유함수들은 서로 공간적으로 분리되어 있는데 이 현상은 앤더슨 편재(Anderson localization)로 알려져 있으며, 많은 수학적 결과가 증명되어 있다.

- 반면, 3 차원 이상에서 스펙트럼 내부에 위치하는 고유치의 분포는 이와 전혀 다른 현상을 보일 것으로 예상되는데, 이 분포는 랜덤 행렬이론 ※에 의해 예측될 것으로 생각되나, 이에 대한 수학적 결과는 전혀 없는 실정이다. 본 연구에서는 확장 상태 가설(extended states conjecture)이라 알려진 이 예상을 수학적으로 엄밀하게 분석하고자 한다.
  ※ 확률변수를 포함하는 행렬로 정확한 값을 알지 못하는 경우에도 확률 개념을 사용하여 어떤 모형의 성질을 파악하는 것이 가능함.

- 본 연구에서는 최근 발전한 랜덤 행렬 이론을 이용하여 랜덤 슈뢰딩거 연산자의 성질, 즉 물질에서의 전기 전도성의 변화를 이해하고자 한다. 본 연구를 통해 수리물리학 및 확률론 분야뿐만 아니라 복잡계를 연구하는 네트워크 이론 등 관련 분야의 발전에도 공헌할 수 있을 것으로 기대된다.

연구내용

d차원 격자(Z^d)에서 정의된 확률변수 V와 그래프 라플라시안 $-\Delta$를 생각해 보자. 랜덤 슈뢰딩거 연산자는 $-\Delta+\mathrm{V}$로 정의되며, 이 모형은 격자 구조에서 단입자의 양자역학적 특성을 분석하는 데에 사용된다. 앤더슨의 분석에 의하면, 이 모형은 $\mathrm{d}\leq 2$인 경우 또는 스펙트럼의 끝부분에서 편재성(localization)을 보이며, 이에 해당하는 물리계는 부도체적 성질을 나타낸다. 이에 대한 이론 및 실험적 연구는 1950 년대 이후 지금까지 활발하게 이루어져 왔으며, 많은 성과를 거두어 왔다.

한편, 동일한 모형에서 $\mathrm{d}\geq 3$인 경우, 스펙트럼의 내부에 위치하는 고유치의 분포는 비편재성(delocalization)을 나타낼 것으로 보이며, 이에 대응되는 물리계는 도체의 성질을 가질 것으로 예측된다. 앤더슨 편재와는 다르게, 이러한 비편재성에 대한 연구 결과는 수치적 분석이나 엄밀하지 않은 추측에 의존하고 있는 상태이다.

비편재성에 대한 엄밀한 수학적 결과는 랜덤 행렬이론에서 처음으로 증명되었다. 랜덤 행렬 모형 중 가장 기본이 되는 것은 위그너 행렬이며, 이는 확률변수로 이루어진 행렬 $W = (w_{ij})_{1 \le i,j \le N}$에 조건 $w_{ij} = \overline{w}_{ji}$를 추가한 것이다. 위그너 행렬의 고유치는 모두 실수이며, 그 고유벡터 v_i를 정규화 할 경우, 각각의 원소 $v_i(\alpha)$는 $|v_j(\alpha)| \le N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$을 만족시킨다. 따라서, 각각의 고유벡터는 특정한 방향성을 띄지 않으며, 이를 통해 비편재성을 알 수 있다.

한편, 위그너 행렬 W의 고유치 분포는 확률변수 w_{ij}의 구체적인 분포에 의존하지 않으며, 이러한 성질을 보편성(universality)라 부른다. 보편성은 랜덤 행렬이론에서 나타나는 중요한 특성이며, 이러한 보편성을 통해 수학 및 물리학뿐만 아니라 타 분야에서 랜덤 행렬이론을 응용하는 것이 가능하다고 할 수 있다.

또한, 보편성의 증명과정을 통해 위그너 행렬의 비편재성이 증명되기도 한 만큼, 본 연구의 목표를 달성하기 위하여 랜덤 슈뢰딩거 연산자 및 관련 모형에서 보편성이 나타나는지 여부를 분석하는 것으로부터 연구를 시작해야 할 것이라 본다.

랜덤 슈뢰딩거 연산자의 성질을 이해하기 위하여, 먼저 중간 단계에 있는 모형, 예를 들어 랜덤 포텐셜을 랜덤 대각행렬 V로 생각했을 때, $\theta V + W$와 같은 모형을 생각할 수 있다. 최근의 연구 결과를 통해 이러한 모형에서 편재성 및 비편재성이 나타날 조건에 대한 분석이 거의 완성된 상태이다. 이 모형에서 평균장(mean-field)모형에 해당하는 위그너 행렬을 근거리(short-range) 상호작용을 다루는 랜덤 슈뢰딩거 연산자로 바꿨을 때 나타나는 변화를 분석하는 것이 본 연구에 사용하고자 하는 접근 방식이다.

랜덤 행렬 H가 주어졌을 때, 고유치의 분포 및 관련 성질을 분석하기 위하여 고유치 분포의 Stieltjes 변환을 사용하는 방법이 일반적이다. 행렬 H의 고유치를 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$라 할 때, 복소수 z에 대하여 다음을 생각하자.

$$m(H) = \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, (H - z)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu_i - z}$$

위에서 주어진 함수가 행렬 H의 고유치 분포의 Stieltjes 변환이며, 이 함수는 행렬 H의 고유치 및 고유벡터의 성질을 모두 가지고 있다. 본 연구에서는 행렬 H가 랜덤 슈뢰딩거 연산자 $-\Delta + V$로 주어졌을 때, 그 고유치 분포의 Stieltjes 변환 $m(H)$를 얻고, 이 함수가 $H' = \theta V + W$로 정의되는 랜덤 행렬에서 나타나는 Stieltjes 변환 $m(H')$과 어느 정도 차이를 보이는지에 대한 해석학적 분석을 수행할 계획이다. 이러한 분석은 Stieltjes 변환의 기대값의 차이를 통해 고유치의 분포를 비교하는 그린 함수 비교 정리(Green function comparison theorem)에 의해 이루어지며, 이를 위해서는 행렬 $(H - z)^{-1}$를 이루고 있는 원소들의 크기에 대한 추정, 이른바 국소 반원형 법칙(local semicircle law)의 증명이 우선적으로 필요할 것으로 예상된다.

연구 인력	연구기간	연구비
총 O 명 (교수 O 명/연구원 O 명)	'00 년 00 월 ~ '00 년 00 월 (00 개월)	OOO백만원